Conteúdos:

Cálculo vetorial

Noção de vetor

Operações com vetores

Referenciais. Coordenadas de um vetor relativamente a uma base

Produto interno de dois vetores

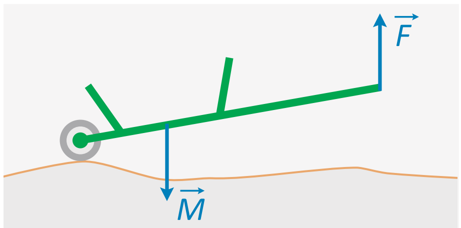
Cálculo vetorial

Introdução ao conceito de vetor

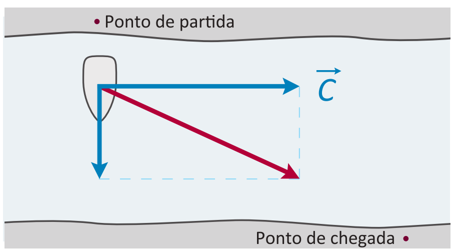
Para nos referirmos a certas grandezas um número não é suficiente. Por exemplo, a grandeza força está ligada também a uma direção e um sentido.

Dois exemplos

Sobre um carro de mão exercem-se duas forças, a massa transportada e a força exercida para puxar o carro, ambas representadas por vetores.



Um barco a remos que atravessa um rio sofre a influência da força do motor e da força da corrente do rio. Apesar de partir numa direção perpendicular à direção do rio, o ponto de chegada do barco, na outra margem do rio, não estará exatamente alinhado com o ponto de partida.



Referência histórica:

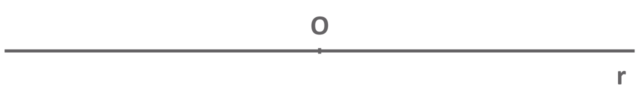
A propósito de problemas da Física, o alemão Hermann Grassman (1809-1877) introduziu a noção de espaço vetorial. No entanto, foi o escocês William Hamilton (1805-1865) um dos primeiros a utilizar vetores e provavelmente o inventor do termo.

O americano Gibbs (1839-1903) e o inglês Anglais Heaviside (1850-1925), disciplinos de Hamilton, deram ao cálculo vetorial quase a sua forma atual.

Um vetor é um “objeto matemático” que envolve uma dada direção, um dado sentido e uma determinada intensidade e que já foi abordado a propósito do tema “Translações”.

Para que se possa iniciar o estudo do Cálculo Vetorial é conveniente rever alguns conceitos.

Sabe-se que um ponto O de uma reta r divide-a em duas **semirretas** sendo O a origem comum de ambas. A reta r diz-se **reta suporte** das duas semirretas.



Consideremos sobre uma reta s dois pontos A e B. Ao subconjunto de pontos da reta constituído por A e B e todos os pontos compreendidos entre A e B chama-se **segmento de reta AB** e representa-se por **[AB]**.

A reta s é a reta suporte do segmento.

Em particular se considerarmos um segmento cujos extremos coincidem, por exemplo [AA], chamamos-lhe segmento nulo.

Segmentos de reta geometricamente iguais (segmentos que quando se sobrepõem coincidem um com o outro ponto por ponto) têm o mesmo comprimento.

Exemplo:

Considera o paralelogramo [ABCD].

a) Quantos segmentos de reta estão representados?

[AB] ou [BA]; [DC] ou [CD]; [AD] ou [DA]; [BC] ou [CB].

b) Indica segmentos de reta geometricamente iguais.
Explica a tua resposta.

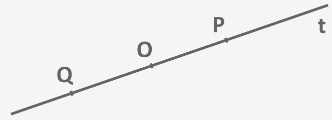
[AB]; [DC] são geometricamente iguais, [AB] ≅ [DC] e [AD] ≅ [BC],
Ou, considerando que têm o mesmo comprimento, podemos também escrever,

$$\overline{AB} = \overline{DC} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \overline{BC}$$

Porque são segmentos de reta que quando se sobrepõem coincidem ponto por ponto. Atendendo a que se trata de um paralelogramo outra coisa não podia acontecer (porquê?).

Nota:

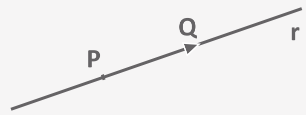
Consideremos a reta t.



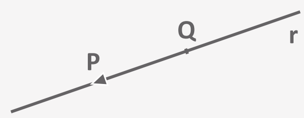
A reta t está dividida em duas semirretas:
- A semirreta $\dot{O}P$, com origem em O e passa por P;
- A semirreta $\dot{O}Q$, com origem em O e passa por Q.

A semirretas $\dot{O}P$ e $\dot{O}Q$ têm sentidos opostos. Dizemos que são semirretas opostas

Observa:



Se numa reta r, onde se marcam dois pontos P e Q se considerar que P está antes de Q diz-se que a reta fica orientada no sentido de P para Q.



Se pelo contrário, dissermos que Q precede P a reta r fica orientada no sentido de Q para P.

Numa prova de natação, os nadadores nadam em trajetórias paralelas entre si.

TAREFA 1

a) Considera o paralelogramo paralelogramo[ABCD].

a.1) Quantas direções estão representadas?

a.2) E sentidos?

Explica as tuas respostas.

b) Considera ainda o mesmo paralelogramo.

b.1) Indica um segmento geometricamente igual a [BA].

b.2) Indica um segmento orientado equipolente a [B,A].

b.3) Quantos segmentos orientados se podem considerar na figura?

b.4) E quantos vetores estão representados na figura.

Dizemos que nadam todos na mesma **direção**.

De várias retas paralelas dizemos que têm a mesma direção.

A direção de uma semirreta ou de um segmento de reta é a direção da respetiva reta suporte.

Considerando ainda o exemplo da prova de natação, os nadadores nadam em trajetórias paralelas mas, por vezes, em sentidos contrários. Pode acontecer que alguns nadadores se atrasem e que, em determinado momento, as pessoas que assistem à prova vejam uns a nadar da esquerda para a direita e outros da direita para a esquerda.

Embora continuem a nadar em trajetórias paralelas o **sentido** é o oposto.

Numa direção há que considerar dois sentidos.

Assim como numa reta, também podemos estabelecer dois sentidos num segmento de reta.

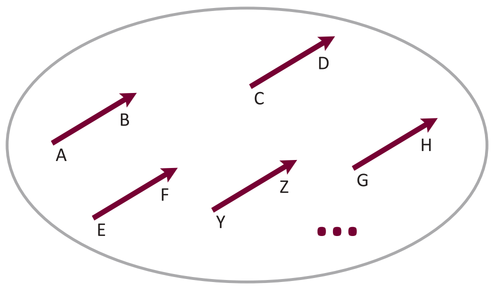
Se no segmento de reta [AB] considerarmos A o ponto origem e B o ponto extremidade do segmento, este fica orientado de A para B e representa-se por **[A,B] – segmento orientado** com origem em A e extremidade em B.

O segmento de reta **[B, A]** é o segmento de reta orientado com o **sentido oposto** ao de **[A,B]**, o ponto origem é B e o ponto extremidade é A.

Equipolência de segmentos de reta orientados:

Noção de vetor.

Observa os segmentos de reta orientados representados na figura.



Os vários segmentos de reta orientados, [A, B] , [C, D],... ,[Y,Z]..., apesar de terem pontos de aplicação distintos, têm a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido. Diz-se que são **equipolentes.**

Deles se diz que representam o mesmo vetor (vetor livre).

Um vetor é pois caracterizado por um comprimento, uma direção e um sentido.

É usual representar um vetor por uma letra minúscula com uma seta em cima. Por exemplo, $\vec{u}$, $\vec{v}$, etc. Assim, no caso anterior podemos escrever,

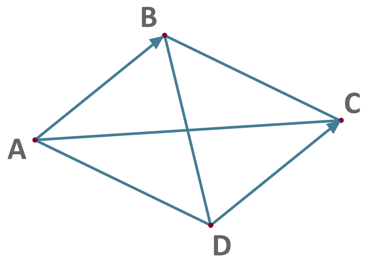
$\vec{u}$ = {[A, B], [C, D], [E, F], ...,[Y, Z],...}

Sendo o segmento de reta orientado [A,B] um representante do vetor $\vec{u}$, o vetor $\vec{u}$ pode ser designado por $\overrightarrow{AB}$.

Igualdade vetorial

A igualdade entre vetores, por exemplo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ significa que:

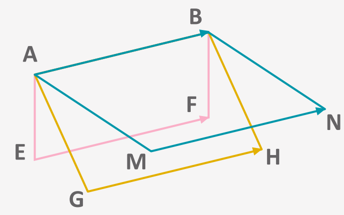
1. As retas AB e CD são paralelas ou coincidentes.
2. O sentido de A para B é o mesmo de D para C.
3. Os comprimentos de [AB] e [DC] são iguais.



Nota:

Sendo [ABCD] um paralelogramo, significa que [AC] e [BD] têm o mesmo ponto médio.

Diremos, também, que os segmentos de reta [A, B] e [D, C] são equipolentes. Sendo dados os pontos A e B existem uma infinidade de pontos M e N tais que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$



Vetor nulo

Os vetores $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{BB}$ designam o vetor nulo, que tem também a notação $\vec{0}$. Tem direção e sentido indeterminados e comprimento nulo.

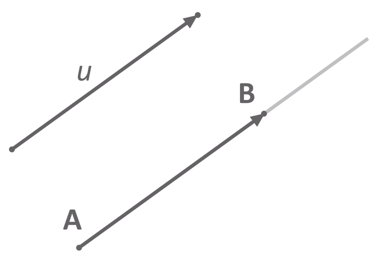
Propriedades:

- $\overrightarrow{AK} = \vec{0}$, significa que A e K são coincidentes;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AL}$ significa que B e L coincidem;
- Para todo o vetor $\vec{u}$ e um ponto A, existe um só ponto M tal que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$;
- Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são opostos, escrevemos que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Soma de um ponto com um vetor. Diferença de dois pontos.

Consideremos um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Para representar $\vec{u}$ por um segmento orientado, com origem num ponto A traça-se a semirreta com origem em A e que tem a direção e o sentido de $\vec{u}$. Marca-se nessa semirreta o ponto B de modo que $\overrightarrow{AB}$ seja igual ao comprimento de $\vec{u}$. Tem-se então, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$



Ao ponto B assim determinado chama-se soma de A com $\vec{u}$.

$B = A + \vec{u}$

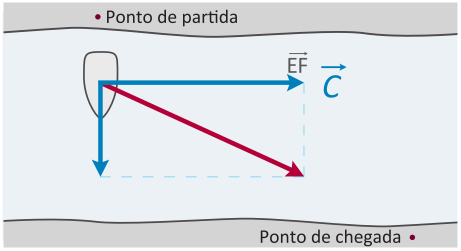
A soma de um ponto A com $\vec{u}$ (mesmo com $\vec{u}$ vetor nulo) é o ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

A expressão $B = A + \vec{u}$ sugere que se escreva $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$

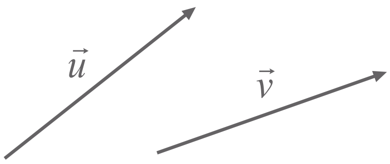
Assim o vetor $\overrightarrow{AB}$ pode considerar-se a diferença entre B e A.

Adição de vetores: propriedades

A partir do exemplo, és capaz de indicar qual é o vetor que representa a deslocação do barco?



Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores livres.

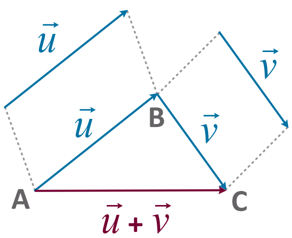


Considere-se um ponto A e

- marque-se B de modo a que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ($\overrightarrow{AB}$ é um representante de $\vec{u}$)
- marque-se C de modo a que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ ($\overrightarrow{BC}$ é um representante de $\vec{v}$)
- una-se A com C ($\overrightarrow{AC}$ é um representante de $\vec{u} + \vec{v}$)

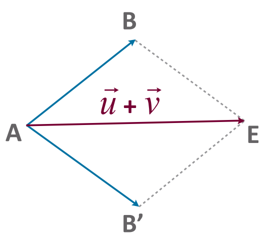
O vetor $\overrightarrow{AC}$ (= $\overrightarrow{DF}$) é a soma de $\vec{u} + \vec{v}$.

Escrevemos, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$



Podemos também traçar dois representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AB'} = \vec{v}$

Sendo E o quarto vértice do paralelogramo [ABEB´], então $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}$



Nota:

O vetor $\overrightarrow{AC}$ é independente do ponto A escolhido.

Se partirmos de um ponto D e marcarmos E e F de modo a ser $\overrightarrow{DE} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{EF} = \vec{v}$ obtém-se $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$.

TAREFA 2

Dado um vetor qualquer $\vec{u}$ à tua escolha (não nulo), constrói segmentos orientados que representem os vetores:

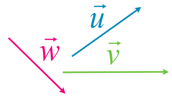
a) $-3.\vec{u}$

b) $\frac{1}{2}\vec{u}$

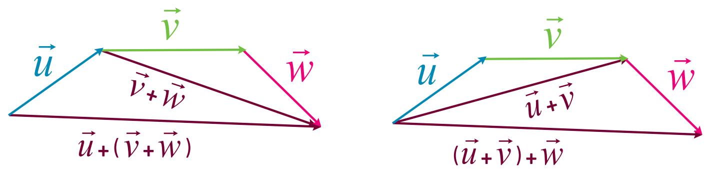
c) $2{,}5.\vec{u}$

Propriedades da adição vetorial

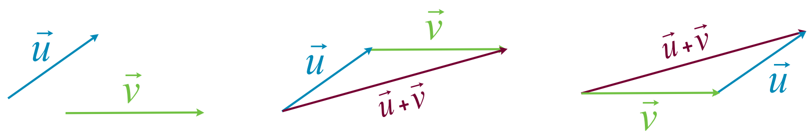
Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se as propriedades:



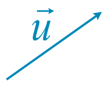
a) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, **ASSOCIATIVIDADE**



b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, **COMUTATIVIDADE**

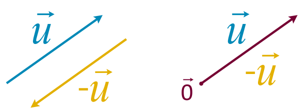


c) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, **$\vec{0}$ É O ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO**



d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, **A SOMA DE DOIS VETORES SIMÉTRICOS É O VETOR NULO**

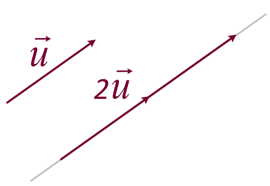
(sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, temos $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$)

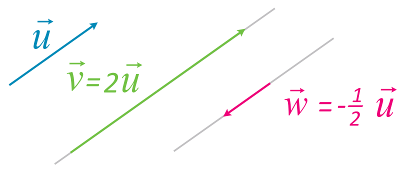


Produto de um número real por um vetor: propriedades

A seguir apresenta-se a definição de um número real por um vetor:

$\vec{u}$ é um vetor não nulo e **a** um número real não nulo, por exemplo, **a** = 2





O produto de um vetor por um número real é um vetor, que podemos chamar de $\vec{v}$ e tem as seguintes características:

- $\vec{v}$ tem a mesma direção de $\vec{u}$;
- $\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\vec{u}$ se a > 0;
- $\vec{v}$ tem sentido contrário ao de $\vec{u}$ se a < 0;
- $\vec{v}$ tem de comprimento $|a|$ vezes o comprimento de $\vec{u}$.

Propriedades da multiplicação de um número real por um vetor

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e **a** e **b** dois números reais quaisquer, a multiplicação de um número real por um vetor goza das seguintes propriedades:

a) a ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) = a $\vec{u}$ + a $\vec{v}$, distributividade em relação à adição no conjunto *V* dos vetores.

b) (a + b) $\vec{u}$ = a $\vec{u}$ + b $\vec{u}$, distributividade em relação à adição em $\mathbb{R}$.

c) a (b $\vec{u}$) = (a.b) $\vec{u}$

d) 1.$\vec{u}$ = $\vec{u}$

Nota:

Este cálculo é semelhante ao cálculo com polinómios.

Exemplo

Determine $\vec{w}+\vec{t}$ sabendo que $\vec{w}$ = 3$\vec{u}$ -2$\vec{v}$ e $\vec{t}$ = 5$\vec{u}$ + 3$\vec{v}$.

Temos que

$\vec{w}+\vec{t}$ = (3$\vec{u}$ -2$\vec{v}$) + (5$\vec{u}$ + 3$\vec{v}$) = 3$\vec{u}$ + 5$\vec{u}$ -2$\vec{v}$ +3$\vec{v}$ = (3 + 5) $\vec{u}$ + (-2 + 3) $\vec{v}$

Donde

$\vec{w}+\vec{t}$ = 8$\vec{u}$ + $\vec{v}$

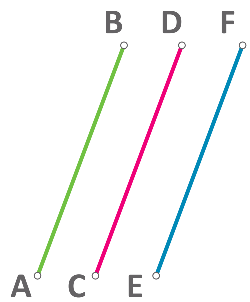
Vetores aplicados e vetores livres

O estudo feito até aqui apoiou-se em conhecimentos sobre segmentos orientados, vetores aplicados e vetores livres.

Para simplificar, utilizamos simplesmente o nome **vetor** para designar vetor aplicado e vetor livre. No entanto é importante estares consciente da diferença entre estes objetos matemáticos.

Então, vejamos.

Na figura ao lado, os segmentos orientados [A, B], [C, D] e [E, F] (**vetores aplicados num ponto**)têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Diz-se, tal como vimos anteriormente, que são equipolentes.

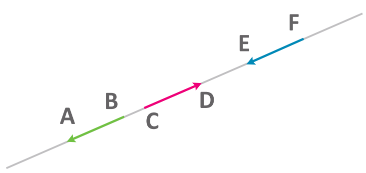


A relação de equipolência é uma relação que divide o conjunto de todos os segmentos orientados em classes. Cada uma dessas classes, com determinada direção, determinado sentido e determinado comprimento, define um **vetor livre**.

Vetores colineares. Ângulo de dois vetores

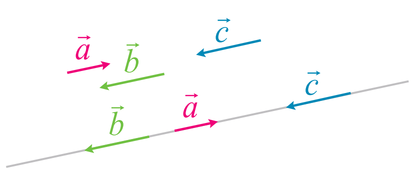
Diz-se que dois ou mais vetores aplicados são **colineare**s quando têm a mesma reta suporte.

Por exemplo, [A, B], [C, D] e [E, F] são colineares



Diz-se que dois ou mais **vetores livres** são **colineares** se e só se são representáveis por segmentos orientados (vetores aplicados) de uma mesma reta.

Por exemplo $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são colineares

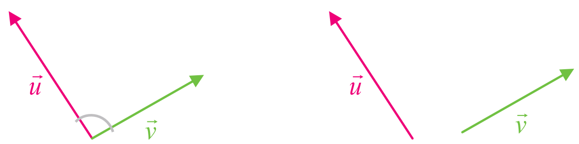


Desta definição resulta que:

- o vetor $\vec{0}$ é colinear com qualquer vetor;
- dois vetores livres são colineares se e só se são paralelos ou um deles é nulo.

Chama-se **ângulo de dois vetores** aplicados num mesmo ponto à amplitude do ângulo convexo por eles formado.

Chama-se ângulo de dois vetores livres não nulos ao ângulo de dois vetores aplicados num mesmo ponto e que os representam.



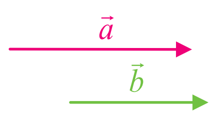
O ângulo de [O, A] com [O, B] é o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.

Esse ângulo designa-se por $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

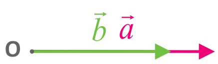
O ângulo de dois vetores quaiquer não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pertence a $[0°, 180°]$.

Exemplos: Quando o ângulo entre dois vetores é 0º ou 180º.

Sejam os vetores a e b, com a mesma direção e o mesmo sentido:



Dois segmentos de reta que os representem formam sempre um ângulo nulo.

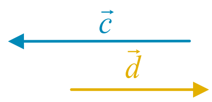


$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$
$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

Assim,

$\vec{a}\hat{\ }\vec{b} = 0°$

Sejam os vetores c e d com a mesma direção e sentidos opostos:



Dois segmentos de reta que os representem formam sempre um ângulo raso.

$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$
$\vec{d} = \overrightarrow{OD}$

Assim,

$\vec{c}\hat{\ }\vec{d} = 180°$

Nota:

Considera-se indeterminado o ângulo de qualquer vetor com o vetor nulo.

Referenciais. Correspondência entre o plano e $\mathbb{R}^2$

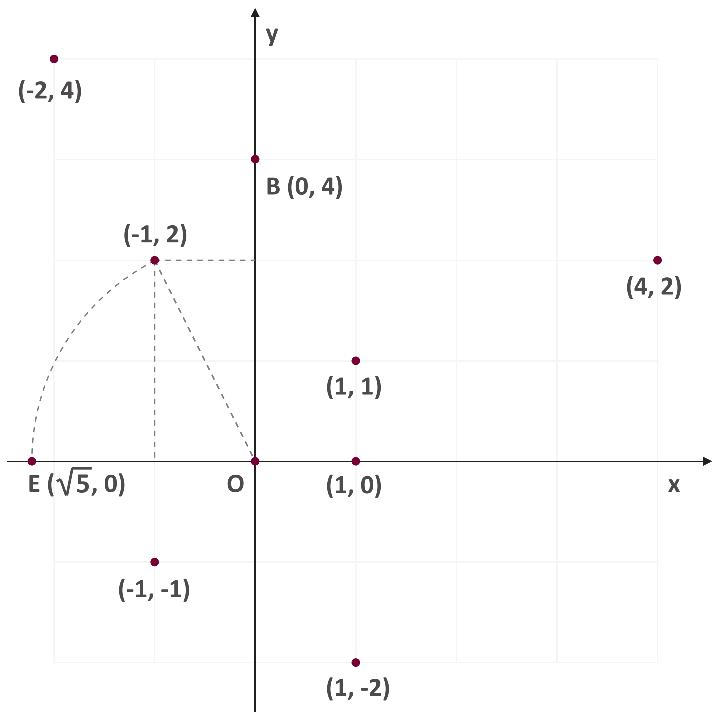
Já vimos anteriormente que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos do plano e o conjunto $\mathbb{R}^2$ (conjunto de pares ordenados de números reais). De facto fixando dois eixos coordenados com a mesma origem, uma amplitude de comprimento e um sentido positivo em cada um deles é possível fazer corresponder a cada ponto do plano um único par ordenado de números reais e, reciprocamente, a cada par de números reais um, e só um, ponto do plano.

Em todo o estudo que vai seguir-se tomaremos os eixos perpendiculares entre si e a mesma unidade de comprimento nos dois eixos, ou seja, consideraremos um sistema ortogonal e monométrico (o. m.).

Na figura seguinte está desenhado um sistema o. m. onde estão representados vários pontos ao lado dos quais figuram as respetivas coordenadas.

Nota:

Em anos anteriores já chamaste a x a abcissa de ponto P e y a ordenada de P (x , y)

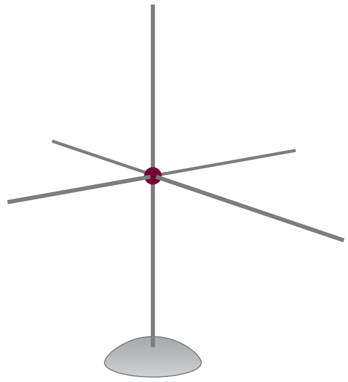


Um referencial no espaço

Pode também estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e o conjunto $\mathbb{R}^3$. Consideremos um exemplo.

Exemplo

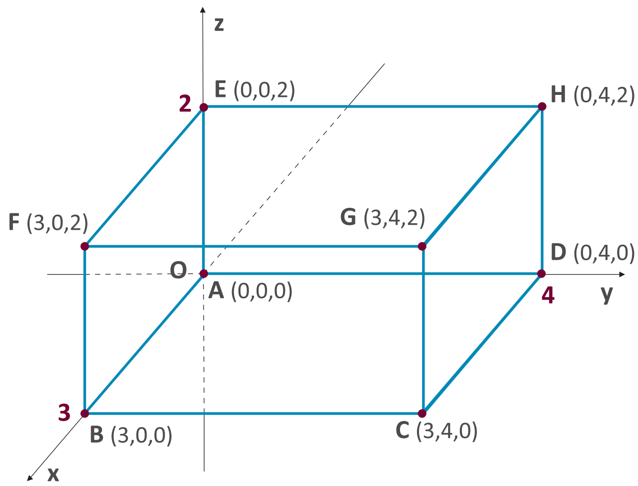
Com três varas,
constrói um referencial
como o da figura ao lado.



TAREFA 3

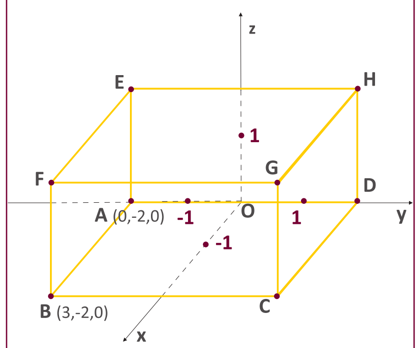
Imagina um cubo nesse referencial. Representa-o e indica as coordenadas dos seus vértices.

Ajusta o paralelepípedo [ABCDEFGH] (3X4X2) na posição da figura e indica as coordenadas dos vértices.



TAREFA 4

Indica as coordenadas dos vértices do paralelepípedo indicado na figura:



O é o ponto médio da aresta [AD] que está contida no eixo das ordenadas.

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Num referencial o.m. consideremos [AB], um segmento de reta de extremos A (1, 2) e B (3, 8). Sendo M o ponto médio de [AB], de coordenadas x e y, podemos afirmar que $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ representam o mesmo vetor.

Donde, M – A = B – M

E atendendo às coordenadas respetivas podemos escrever

(x, y) – (1, 2) = (3, 8) – (x, y)

Ou seja, (x - 1, y - 2) = (3 - x, 8 - y)

Concluindo-se que

$$\begin{cases} x - 1 = 3 - x \\ y - 2 = 8 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3 + 1 \\ 2y = 2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+1}{2} \\ y = \frac{2+8}{2} \end{cases}$$

O ponto médio do segmento de reta de extremos A (1, 2) e B (3, 8) tem por coordenadas:

Abcissa $\frac{3+1}{2}$

(semissoma das abcissas dos pontos A e B, extremos do segmento)

Ordenada $\frac{2+8}{2}$

(semissoma das ordenadas dos pontos A e B, extremos do segmento)

Conclui-se que M (2 , 5).

TAREFA 5

Num referencial o.m. são dados os pontos A (0, 2); B (2, 3) e C (1, -1)

Determina o ponto médio de cada um dos segmentos indicados:

a) [AC]

b) [AB]

c) [CB]

Num referncial cartesiano consideremos [AB], segmento de reta de extremos A (a_1 , a_2) e B (b_1 , b_2). Seja M (x , y) o ponto médio de [AB] cujas coordenadas x e y não são conhecidas.

M - A e B - M representa o mesmo vetor, pelo que se escreve

M - A = B - M

Atendendo às coordenadas respetivas

$(x , y) - (a_1 , a_2) = (b_1 , b_2) - (x , y)$

Equivalente a

$(x - a_1 , y - a_2) = (b_1 - x , b_2 - y)$

Concluimos que

$$\begin{cases} x - a_1 = b_1 - x \\ y - a_2 = b_2 - y \end{cases}$$

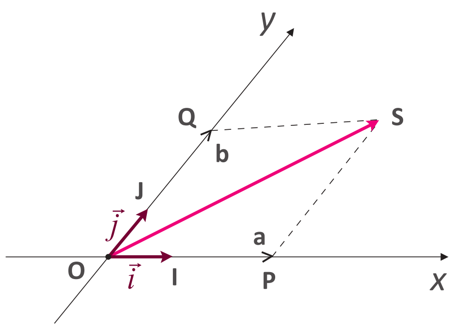
Resolvendo o sistema em ordem a x e y, obtemos o ponto médio de [AB],

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Noção de base.

Coordenadas de um vetor relativamente a uma base

Três pontos do plano não alinhados constituem um referencial do plano. Consideremos $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ e $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Dizemos que $(\vec{i}, \vec{j})$ é uma base do plano.



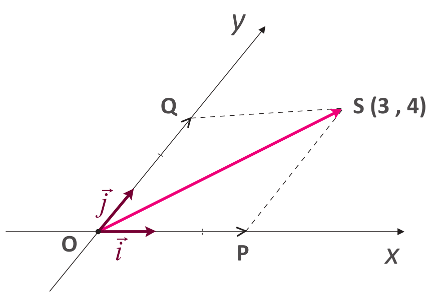
Para todo o ponto S do plano, podemos escrever.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$; $\overrightarrow{OP}$ é colinear com $\vec{i}$ e temos que $\overrightarrow{OP} = a\,\vec{i}$ e $\overrightarrow{OQ}$ é colinear com $\vec{j}$ e temos que $\overrightarrow{OQ} = b\,\vec{j}$.

Donde, $\overrightarrow{OS} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$.

O par ordenado (a, b) é o par de coordenadas do vetor $\overrightarrow{OS}$ na base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemplo

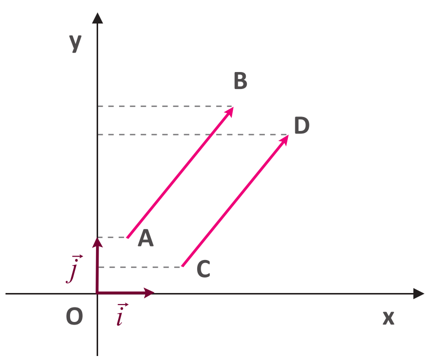


$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$; $\overrightarrow{OP} = 3\,\vec{i}$ e $\overrightarrow{OQ} = 4\,\vec{j}$

$\overrightarrow{OS} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$

O par ordenado (3 , 4) é o par de coordenadas de $\overrightarrow{OS}$ na base $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$

Num referencial $(O, \vec{i}, \vec{j})$, sejam os pontos A e B em que conhecemos as suas coordenadas A (a, b) e B (a´, b´). O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem por coordenadas (a´-a, b´-b).



Se A (a, b) e B (a´, b´) então $\overrightarrow{AB}$ (a´-a, b´-b).

- Se os pontos A e B são coincidentes, então $\overrightarrow{AB}$ é o vetor nulo e as suas coordenadas são (0, 0).
- Um vetor é nulo se e somente se as suas duas coordenadas são nulas.
- Dois vetores são iguais se e somente se têm coordenadas iguais (tem iguais abcissas e iguais ordenadas).
- Conhecidas as coordenadas de A, B e C, podemos determinar as coordenadas de D sabendo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

TAREFA 6

Dados os pontos A (0,3 ; 1,1); B (2,5; 3); C (2,3; 0,6) e sabendo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, determina as coordenadas de D.

Exemplo

Se A (-2, 1); B (2, 3); C (4, 1),

então $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (2, 3) – (-2, 1) = (2- (-2), 3 - 1) = (4, 2).

Se designarmos por d e d´as coordenadas do ponto D, temos que

$\overrightarrow{CD}$ = D – C = (d, d´) - (4, 1)= (d-4, d´-1)

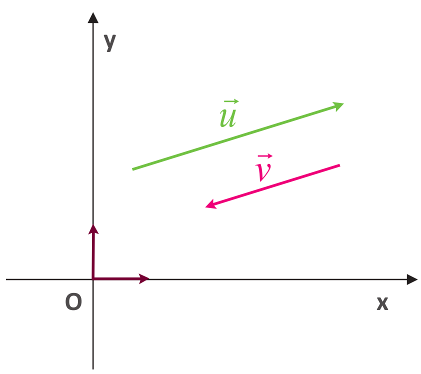
Sabendo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, temos o sistema $\begin{cases} d - 4 = 4 \\ d' - 1 = 2 \end{cases}$

Encontramos, d = 8 e d´= 3.

O ponto D tem por coordenadas (8, 3)

Condição de colinearidade de dois vetores

Numa base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) qualquer, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm respetivamente por coodenadas (a, b) e (a´, b´).



Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e somente se, ab´- ba´ = 0

Escrevemos também det ($\vec{u}, \vec{v}$) = 0 ou $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ é a condição de colinearidade de dois vetores. Note-se que se nenhuma das coordenadas é nula, podemos escrever aa´ = bb´.

Exemplo

Os vetores $\vec{a}$ (-3, 2) e $\vec{b}$ (6, -4) são colineraes visto que

(-3) x (-4) - 2 x 6 = 12 – 12 = 0

Ou seja, det ($\vec{a}, \vec{b}$) = $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$ = 0

TAREFA 7

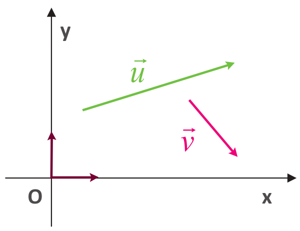
Para verificar se três pontos são colineares um dos caminhos a seguir é verificar se dois quaisquer dos vetores definidos pelos três pontos são colineraes, isto é, se têm as coordenadas proporcionais.

Verifica se são colineares os pontos A (1, 2) , B (3, -1) e C (5, 3)

Condição de ortogonalidade de dois vetores

Dizemos que dois vetores não nulos são ortogonais se as suas direções são perpendiculares. Chamamos base ortonormada a uma base para a qual os vetores ($\vec{i}$, $\vec{j}$) são ortogonais (perpendiculares) e têm a mesma norma.

Numa base ortonormada, onde os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm respetivamente por coordenadas (a, b) e (a´, b´).



Numa base ortonormada, os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se e somente se aa´+ bb´= 0.

É o critério de ortogonalidade de dois vetores.

Exemplo

Seja $\vec{u}$ = (3, 5) procuremos um vetor $\vec{v}$ (x, y) perpendicular a $\vec{u}$.

Utilizando o critério de ortogonalidade de dois vetores, temos que

$$3x + 5y = 0$$

Trata-se de uma equação de solução indeterminada. Atribuindo a x o valor 5, vem para y o valor -3, (solução da equação, (5, -3)).

O vetor $\vec{v}$ (5, -3) é então perpendicular ao vetor $\vec{u}$.

Nota:

Outros vetores perpendiculares a (3, 5) são, por exempo, (-5, 3), (10, -6), ($\frac{5}{3}$, -1).

Cálculo da distância entre dois pontos

Num referencial o.m., se o $\vec{u}$ vetor tem de coordenadas (a, b), teremos:

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ com A (x_1, y_1) e B (x_2, y_2) , então

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo:

Determina a distãncia entre os pontos A (-1, 1) e B (3, 4)

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-1)^2}$$

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{25} = 5$$

TAREFA 8

Num referencial o.m. determina a distância dos pontos indicados em cada uma das alíneas:

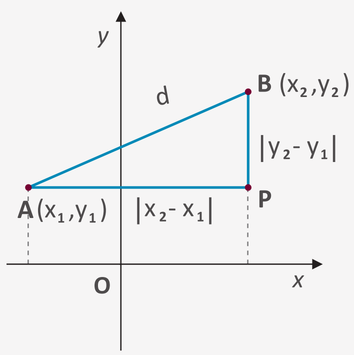
a) A (1,0); B (3, 4)

b) C (-1, 1); D (7, 7)

c) E (0, 1); F (12, -4)

Nota:

Sendo A (x1 , y1) e B (x2 , y2), a distância entre A e B é dada por $d(A,B) = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



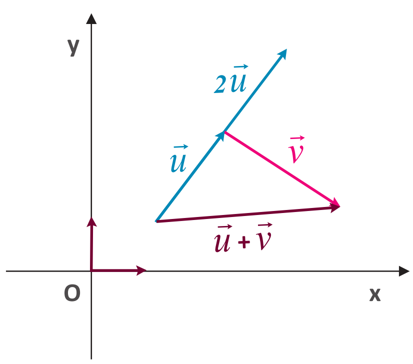
Atenção que $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$

As coordenadas de vetores e operações

Numa base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) dados os vetores $\vec{u}$ (a, b) e $\vec{v}$ (a´, b´), o vetor simétrico de $\vec{v}$, $-\vec{v}$ tem de coordenadas (-a´, -b´).

O vetor $\vec{u} + \vec{v}$ tem de coordenadas (a + a´, b + b´), vetor $\vec{u} - \vec{v}$ tem de coordenadas (a – a´, a – b´) e o vetor k $\vec{u}$ tem de coordenadas (ka, kb), k ∈ ℝ.

Exemplo



$\vec{u}$ (2 , 3)	$\vec{v}$ (4 , -2)
$2\vec{u}$ (4 , 6)	$(\vec{u} + \vec{v})$ (6 , 1)

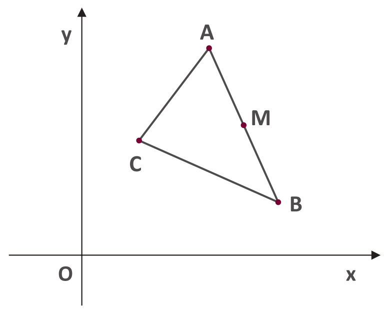
Podemos deduzir as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta aplicando as operações com vetores.

Sejam três pontos A, B e C de coordenadas respetivamente, no referencial $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A (α, β), B (α´,β´) e C (α´´, β´´).

Sabendo que M (x_M, y_M) é o ponto médio do segmento [A, B] então

$2\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, que nós dá então

$$x_M = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \text{ e } y_M = \frac{\beta + \beta'}{2}$$



Sendo x_M e y_M as coordenadas de M.

Produto interno

Vimos anteriormente a multiplicação de um número real por um vetor. Agora vamos estudar o "produto" de dois vetores.

Dados dois vetores $\vec{u}$ (x, y) e $\vec{v}$ (x´, y´), num referencial o.m., chamamos produto interno destes dois vetores ao número x x´+ y y´.

Escrevemos $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = x x´+ y y´, que se lê " vetor $\vec{u}$ interno $\vec{v}$ " ou " vetor $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

Nota que:

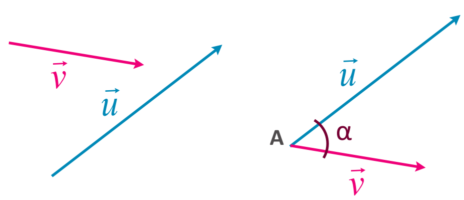
A soma de dois vetores é um vetor, mas o produto interno (ou produto escalar) é um número real.

TAREFA 9

Considera, numa base o.m., os vetores $\vec{u}$ = (2, 1) e $\vec{v}$ = (2, -1) e $\vec{w}$ = (2, 4).

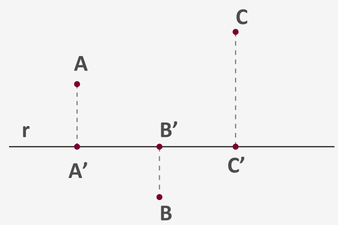
Determina $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ representantes, respetivamente, de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha$



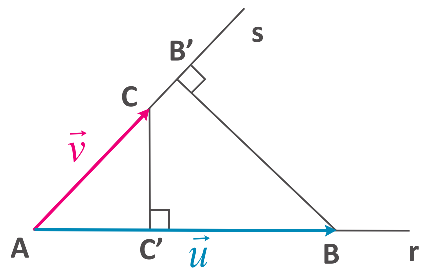
Nota:

Projeção ortogonal de um vetor sobre outro



Na figura A´ é a projeção ortogonal de A sobre a reta r, isto é, A´é o ponto de interseção de r com a reta perpendiculaer a r e que passa por A; B´e C´são, respetivamente, as projeções ortogonais de B e C sobre r.

Temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \, \|\vec{AC}\| \cos \alpha$ $\qquad \alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$



Sendo C´ a projeção ortogonal de C sobre a reta r, isto é, C´é o ponto de interseção de r com a reta perpendicular a r e que passa por C, e se B´é a projeção ortogonal de B sobre r, então:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC'}\| = \|\vec{AC'}\| = \text{proj.}_{\vec{AC}} \vec{AB}\,.$$

Em particular, o produto interno de dois vetores colineares é igual ao produto das normas se eles têm o mesmo sentido e o simétrico se eles têm sentidos contrários.

O produto interno $\vec{u} \cdot \vec{u}$ é igual ao quadrado da norma:

$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{u}\|^2.$

Propriedades

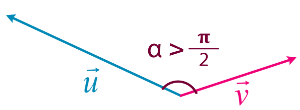
Se as retas AB e AC são perpendiculares, então $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

Inversamente, se $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, os pontos A, B e C sendo distintos dois a dois, então as retas AB e AC são perpendiculares.

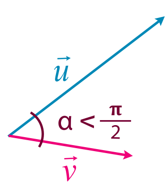
Dizemos, então que os vetores são ortogonais.

O produto interno de dois vetores tem utilidade prática para o estudo da perpendicularidade de duas retas.

Se $\vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0$, então o ângulo dos dois vetores é agudo e se $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$ então o ângulo entre os dois vetores é obtuso.



$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$



$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

Exemplos

Ângulo de dois vetores

Suponhamos que $(\vec{i}, \vec{j})$ é uma base ortonormada e que $\vec{u}\,(\sqrt{3}, 3)$ e $\vec{v}\,(-\sqrt{3}, 3)$.

Vamos determinar o ângulo, , entre os dois vetores.

Sabe-se que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 3 \times 3 = -3 + 9 = 6$

Por outro lado,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

Assim, tem-se que

$$6 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} \cos \alpha$$

$$6 = \sqrt{3+9} \cdot \sqrt{3+9} \cos \alpha$$

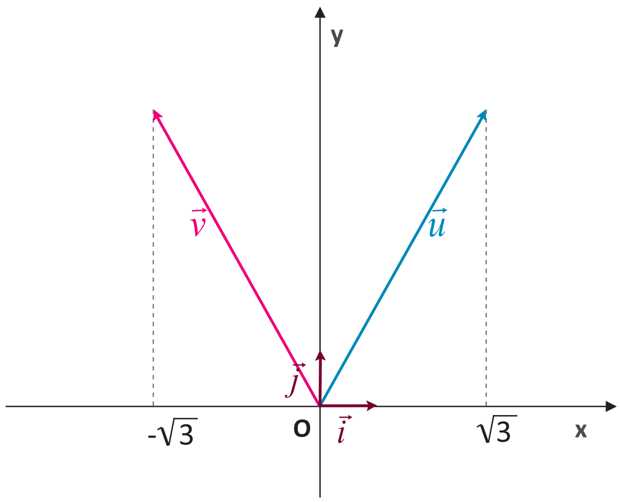
$$6 = \sqrt{12} \cdot \sqrt{12} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{12}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

Concluimos que $\alpha = 60^\circ$

Graficamente temos:



Recorda:

	0°	30°	45°	60°	90°
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Nem sempre o valor que vem para o coseno do ângulo dos dois vetores é um dos valores conhecidos, pelo que há que recorrer às tabelas ou à calculadora para determinar um valor aproximado do ângulo.

Nota:

São perpendiculares a um vetor (a, b) não nulo os vetores os vetores: (b, -a) e (-b, a)

Vetores perpendiculares a (2, 3), com a mesma norma: (-3, 2) e (3, -2)

Com efeito (2, 3) . (-3, 2) = 2x(-3) + 3x2 = 0 (2, 3) . (3, -2) = 2x3 + 3x(-2) = 0

Vetores perpendiculares

1. Determinar, numa base o.m., vectores perpendiculares a $\vec{u}$ (4, -2) e de norma 5. Procuremos $\vec{v}$ (x, y) perpendicular a $\vec{u}$.

Então, aplicando a definição de produto interno entre dois vetores, temos que 4 x + (-2) y =0

Trata-se de uma equação de solução indeterminada. Atribuindo a x o valor 1, vem para y o valor 2, (1 , 2) é uma das soluções da equação.

O vetor (1, 2) é perpendicular a $\vec{u}$, mas não tem norma 5.

O vetor pedido é da forma (k, 2k), sendo k um número real. Como se exige que a norma seja 5, terá que ser

$\sqrt{k^2 + (2k^2)} = 5$

$k^2 + 4k^2 = 25$

$5k^2 = 25$

$k^2 = 5$, donde k = - $\sqrt{5}$ ou k = $\sqrt{5}$

Para k = - $\sqrt{5}$. (k, 2k) = (- $\sqrt{5}$, - 2$\sqrt{5}$)

Para k = $\sqrt{5}$. (k, 2k) = ($\sqrt{5}$, 2$\sqrt{5}$)

O problema tem duas soluções: (- $\sqrt{5}$, - 2$\sqrt{5}$); ($\sqrt{5}$, 2$\sqrt{5}$)

2. Determinar, numa base o.m., um vetor de norma 10 e que seja perpendicular a (3, -4).

(4, 3) é um vetor perpendicular a (3, -4). (Porquê?)

Por consequência

(4k, 3k) , com k≠ 0, a familia de vetores perpendiculares a (3, -4).

Como se exige que a norma seja 10, terá que ser

$(4k)^2 + (3k)^2 = 100$

$16k^2 + 9k^2 = 100$

$25k^2 = 100$

$k^2 = 4$, esta equação é equivalente a k = 2 ou k = -2

Para k = 2, (4k, 3k) = (8,6)

Para k = −2, (4k, 3k) = (-8, -6)

Como era de prever, tem duas soluções; (8, 6) e (-8, -6).

Em síntese

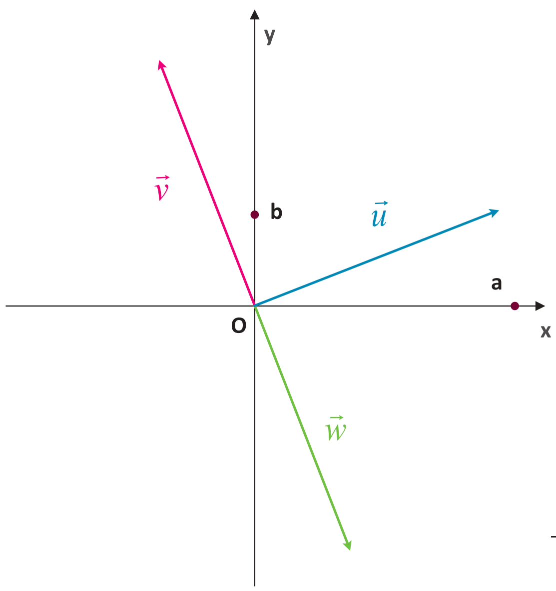
Vimos que (b, -a) e (-b, a) são perpendiculares a um vetor (a, b) não nulo. Para obter um vetor perpendicular a um dado vetor não nulo basta trocar as coordenadas e multiplicar uma delas por -1.

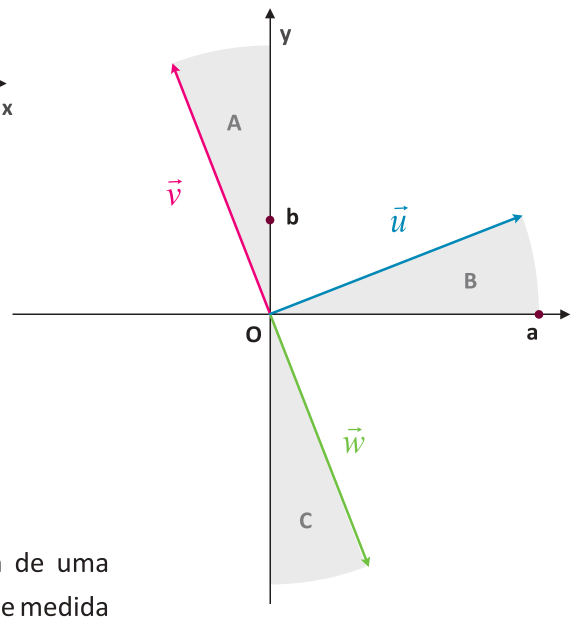
TAREFA 10

Dado o vector $\vec{u}$ (3 , 4), definido numa base o.m., encontra $\vec{w}$ tal que $\| \vec{w} \| = 3$ e tal que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são perpendiculares.

Interpretação geométrica

Consideremos, num referencial o.m., a representação dos vetores $\vec{u}$ (a, b) e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ perpendiculares a $\vec{u}$.





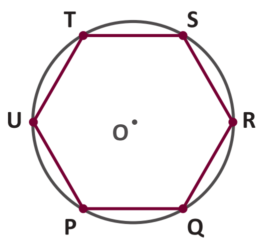
Observa que os triângulos A e C se obtêm de uma rotação do triângulo B de centro na origem e de medida de amplitude de 90° e -90°, respectivamente. Uma vez que a rotação preserva as medidas de comprimento, vê-se que $\vec{w} = (b, -a)$ e $\vec{v} = (-b, a)$

Neste momento temos dois vectores perpendiculares a $\vec{u}$. Mas será que existem mais? (Há mais vectores, com normas diferentes, ou seja, vectores colineares aos já representados).

Todos os vectores de coordenadas $k\,(-b, a)$ com $k \in \mathbb{R}$, são perpendiculares a (a, b).

TAREFA 11

Considera um hexágono [PQRSTU], inscrito numa circunferência de centro O e raio 4.



Calcula:

a) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OU}$

b) $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{QT}$

c) $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{OP}$

Propriedades do produto interno

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e k um número real, temos que

1) $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$;

2) $\vec{u} \,.\, (\vec{v} + w) = \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, w$;

3) $(k\vec{u}) \,.\, \vec{v} = k\, (\vec{u} \,.\, \vec{v})$;

4) $(\vec{u} + \vec{v}) \,.\, (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

Vejamos a demonstração desta última propriedade.

$(\vec{u} + \vec{v}) \,.\, (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}\,(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \,.\, \vec{u} - \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{v} \,.\, \vec{u} - \vec{v} \,.\, \vec{v}$

Sendo o produto interno é comutativo, podemos escrever

$||\vec{u}||\ ||\vec{u}||\ \cos 0^o - \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, \vec{v} - (\ ||\vec{v}||\ ||\vec{v}||\ \cos 0^o)$

Donde, temos finalmente

$||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

Exemplos

1) Demonstrar que $a\,\vec{u} \,.\, b\,\vec{v} = ab\,(\vec{u} \,.\, \vec{v})$; $a, b \in \mathbb{R}$

$a\,\vec{u} \,.\, b\,\vec{v} = a\,(\vec{u} \,.\, b\,\vec{v})$,	pela propriedade 3
$= a\,(b\,(\vec{u} \,.\, \vec{v}))$,	pela propriedade 3
$= ab\,(\vec{u} \,.\, \vec{v})$	pela propriedade associativa da multiplicação de números reais

2) Sendo $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{v}$, determina:

$5\,\vec{u} \,.\, (3\,\vec{u} - 2\,\vec{v})$

Aplicando as propriedades do produto interno tem-se,

$5\,\vec{u} \,.\, (3\,\vec{u} - 2\,\vec{v}) = 5\,\vec{u} \,.\, 3\,\vec{u} - 5\,\vec{u} \,.\, 2\,\vec{v} = 5 \times 3\,(\vec{u} \,.\, \vec{u}) - 5 \times 2\,(\vec{u} \,.\, \vec{v}) = 15\,||\vec{u}||^2$

3) Dados os vectores $\vec{u}\,(1\,,\,3)$ e $\vec{v}\,(k\,,-2)$, definidos numa base o.m., determina k de forma que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares.

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares se e só se $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1, 3) \,.\, (k, -2) = 0 \Leftrightarrow k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 6$

Representa os vetores num referencial o.m. e verifica, geometricamente, se são perpendiculares.

Aplicações do produto interno

Na Física, a palavra "trabalho" tem um sentido específico: é uma grandeza construída a partir de uma força e de um deslocamento. O trabalho de uma força $\vec{F}$ constante sobre um "deslocamento" representado por um vetor $\vec{D}$ é o produto interno $\vec{F} \cdot \vec{D}$.

Diz-se que é um trabalho motor se o produto interno é positivo e é um trabalho resistente se o produto interno é negativo. (O trabalho é um número real, que pode ser positivo ou negativo. Quando a força atua no sentido do deslocamento, o trabalho é positivo, isto é, existe energia sendo acrescentada ao corpo ou sistema. O contrário também é verdadeiro, uma força no sentido oposto ao deslocamento retira energia do corpo ou sistema).

Os físicos utilizam, para calcular o trabalho (**W**) realizado por uma força no decurso do deslocamento do seu ponto de aplicação, a seguinte fórmula:

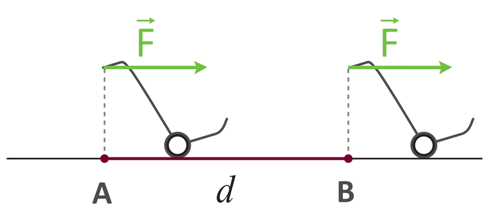
$$\mathbf{W = F.d.cos\alpha}$$

Em que **F** representa a intensidade da força $\vec{F}$, **d** é o comprimento do deslocamento e **α** é a amplitude do ângulo formado pelas direcções da força e do deslocamento. Se o comprimento **d** estiver expresso em metros (m) e a intensidade da força **F** em newtons (N), então o trabalho **W** exprime-se em *joules* (J).

Exemplo

O Inocêncio trabalha na recepção de um hotel e transporta as bagagens dos clientes.

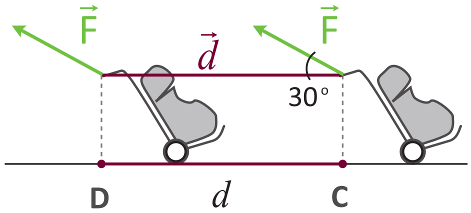
1) Observa a figura seguinte que representa o Inocêncio a deslocar o carro "porta-malas" do ponto A ao ponto B.



A força aplicada pelo Inocêncio tem intensidade 24N, é paralela ao deslocamento no plano horizontal e a distância de A a B é 4m.

Calcula o trabalho realizado pela força $\vec{F}$.

2) No caso seguinte, o Inocêncio desloca uma mala, mas a força aplicada com intensidade de 32N não é paralela ao deslocamento, fazendo com a direcção deste um ângulo com medida de amplitude de 30° e sendo o deslocamento d de 6m.



Qual o trabalho realizado pela força aplicada pelo Inocêncio ao puxar a mala?

1) Dados: F =24 N; sendo F é paralela ao deslocamento, **α** = 0; d = 4m

Pedido: w =?

Atendendo à definição de trabalho, podemos escrever,

$W = 24 \times 4 \times \cos 0^0$ W= 96

Resposta: o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ = 96 j

2) Dados: F = 32 N; o ângulo formado entre F e o deslocamento , **α** = 30^0; d = 6m

Pedido: w =?

Atendendo à definição de trabalho, temos a expressão

$W = 32 \times 6 \times \cos 30^0 = 192 \times (\sqrt{3/2}) = 96\sqrt{3}$

Resposta: o trabalho realizado pela força $\vec{F} = 96\sqrt{3}$ j